JOURNAL OF FUNCTIONAL ANALYSIS 65, 243-272 (1986)

Algèbres de Jordan et équations de Hua

MICHEL LASSALLE

Groupe de Recherche 48 du C.N.R.S., École Polytechnique, 91128 Palaiseau Cedex, France

Communicated by M. Vergne

Received June 5, 1984

1. INTRODUCTION

Ce travail est le prolongement d'un précédent mémoire [16] consacré aux équations de Hua d'un espace hermitien symétrique du type tube. Rappelons brièvement le problème dont il s'agit.

Soient $X = G/K$ un espace hermitien symétrique du type tube et $S = K/L$ son bord de Shilov. On sait définir un noyau de Poisson sur $X \times S$ et la transformée de Poisson de toute hyperfonction sur S. Il y a plus de dix ans, E. M. Stein avait posé le problème de caractériser ces transformées comme solutions d'un système d'équations différentielles du second ordre, écrites dans certains cas par Hua [5].

La première réponse générale à ce problème fut donnée par Johnson et Korányi [8] de la façon suivante. Soient $\mathfrak{g}$ et $\mathfrak{k}$ les algèbres de Lie respectives de G et K, $\mathfrak{g}_c$ et $\mathfrak{k}_c$ leurs complexifiées, et $\mathfrak{p}^+$ (resp. $\mathfrak{p}^-$) l'espace tangent holomorphe (resp. antiholomorphe) de X au point eK. On a $\mathfrak{g}_c = \mathfrak{k}_c \oplus \mathfrak{p}^+ \oplus \mathfrak{p}^-$. Soit $\mathscr{U}(\mathfrak{g}_c)$ l'algèbre enveloppante de $\mathfrak{g}_c$. On considère l'élément de $\mathscr{U}(\mathfrak{g}_c) \otimes \mathfrak{k}_c$ défini par

$$\mathscr{H} = \sum_{i,j} E_i E_j^* \otimes [E_j, E_i^*],$$

où $\{E_i\}$ et $\{E_i^*\}$ sont deux bases duales de $\mathfrak{p}^+$ et $\mathfrak{p}^-$. Dans tout cet article, si f est une fonction sur $X = G/K$, on note $\tilde{f}$ la fonction K-invariante à droite induite sur G. Le résultat suivant est démontré dans [8].

THÉORÈME. *Une fonction f sur X est la transformée de Poisson d'une hyperfonction sur le bord de Shilov S si et seulement si on a $\mathscr{H}\tilde{f} = 0$.*

Ultérieurement nous avons obtenu une caractérisation plus précise [16]. Pour cela considérons le bord de Shilov $S = K/L$ de X. On sait que la paire

0022-1236/86 $3.00

(K, L) est une paire symétrique compacte. C'est-à-dire qu'il existe un automorphisme involutif $\tilde{\tau}$ de K dont l'ensemble des points fixes est L. Soient τ l'automorphisme involutif de $\mathfrak{k}$ correspondant, $\mathfrak{l}$ l'algèbre de Lie de L et $\mathfrak{k} = \mathfrak{l} \oplus \mathfrak{q}$ la décomposition de $\mathfrak{k}$ en sous-espaces propres de τ. On considère l'élément $\mathscr{H}_{\mathfrak{q}} \in \mathscr{U}(\mathfrak{g}_c) \otimes \mathfrak{q}_c$ qui se déduit de $\mathscr{H}$ au moyen de la projection de $\mathfrak{k}_c$ sur $\mathfrak{q}_c$. Dans [16] nous avons démontré le

THÉORÈME. *Une fonction f sur X est la transformée de Poisson d'une hyperfonction sur le bord de Shilov S si et seulement si on a $\mathscr{H}_{\mathfrak{q}} \tilde{f} = 0$.*

Cette seconde caractérisation présente plusieurs avantages. D'une part elle nécessite moins d'équations que la précédente. Celles-ci sont d'autre part *réelles*, c'est-à-dire peuvent être formulées indépendamment de la structure complexe de X. Enfin l'opérateur $\mathscr{H}_{\mathfrak{q}}$ possède une interprétation très naturelle en termes *d'algèbres de Jordan*. On sait que le formalisme d'algèbres de Jordan, dû à Koecher [9, 10], est essentiel dans l'étude des domaines bornés symétriques du type tube. L'opérateur $\mathscr{H}_{\mathfrak{q}}$ s'interprète très simplement dans ce formalisme: $\mathscr{H}_{\mathfrak{q}}$ apparait en effet comme le contracté des opérateurs différentiels ∂ et $\bar{\partial}$ par le produit de Jordan canoniquement associé à X.

On observera que les caractérisations $\mathscr{H}\tilde{f} = 0$ ou $\mathscr{H}_{\mathfrak{q}}\tilde{f} = 0$ sont exprimées sur le groupe G et non sur l'espace X. Cependant Johnson et Korányi ont montré dans [8, p. 596] qu'il est possible d'exprimer directement sur X les équations $\mathscr{H}\tilde{f} = 0$. Le but de cet article est de montrer que ceci est également possible pour les équations $\mathscr{H}_{\mathfrak{q}}\tilde{f} = 0$.

Cependant il s'agit là d'un problème beaucoup plus difficile, et que nous ne savons résoudre que lorsque la fonction f est *bornée*. Ce faisant, nous obtenons *trois nouvelles caractérisations* des fonctions bornées sur X qui sont transformées de Poisson du bord de Shilov. Celles-ci sont entièrement nouvelles. Elles n'avaient jamais été introduites auparavant, même dans les cas particuliers étudiés par Hua [5], Berline et Vergne [1], Korányi et Malliavin [12], et Johnson [6, 7].

Nous donnons successivement la forme explicite que prennent les équations $\mathscr{H}_{\mathfrak{q}}\tilde{f} = 0$ dans chacune des trois réalisations canoniques de X:

(i) la réalisation *non bornée* comme tube sur un domaine de positivité due à Korányi et Wolf [11],

(ii) la réalisation *bornée* comme domaine borné symétrique due à Harish-Chandra [3],

(iii) enfin la nouvelle réalisation en *coordonnées polaires* que nous avons introduite dans [14] et [15].

Chacune des trois nouvelles caractérisations ainsi obtenues s'exprime *uniquement en termes d'algèbres de Jordan.* En particulier nous mettons en évidence une analogie remarquable en termes de *produit triple de Jordan* entre la caractérisation (i) en réalisation non bornée et la caractérisation (iii) en coordonnées polaires. Ceci justifie certainement qu'on recherche une démonstration de nos résultats qui soit strictement interne à la théorie des algèbres de Jordan.

Donnons pour conclure le plan de cet article. La Section 2 est consacrée aux notations. La Section 3 à des rappels et résultats simples sur le formalisme d'algèbres de Jordan. La Section 4 introduit les équations de Hua. Les Sections 5 à 8 sont consacrées aux trois nouvelles caractérisations susmentionnées. La Section 9 en donne une formulation purement en termes d'algèbres de Jordan.

Les résultats de cet article ont été annoncés dans deux notes [17, 18]. On y trouvera traité l'exemple du domaine classique de type $I_{n,n}$.

2. Généralités et notations

Nous nous en tenons ici aux seules notions indispensables à la compréhension du texte. Pour plus de détails et des références, nous renvoyons le lecteur à la Section 1 de [16].

2.1. *Système de racines*

Soit $X = G/K$ un espace hermitien symétrique non compact *du type tube*, qu'on suppose irréductible (cette hypothèse n'est pas décisive et elle est seulement faite pour simplifier les notations). Le groupe G est le plus grand groupe connexe d'isométries de X et K le sous-groupe d'isotropie d'un point $x_0 \in X$. On note $\mathfrak{g}$ et $\mathfrak{k}$ les algèbres de Lie respectives de G et K, $\mathfrak{g} = \mathfrak{k} \oplus \mathfrak{p}$ la décomposition de Cartan associée, et $\mathfrak{u} = \mathfrak{k} \oplus i\mathfrak{p}$ la forme réelle compacte de la complexifiée $\mathfrak{g}_c$. On note $\sigma: X \to \bar{X}$ la conjugaison dans $\mathfrak{g}_c$ par rapport à $\mathfrak{g}$.

Soit $\mathfrak{z}$ le centre de $\mathfrak{k}$. Il existe un élément $Z_0 \in \mathfrak{z}$ tel que $\operatorname{ad} Z_0|_{\mathfrak{p}}$ soit la structure complexe de X au point x_0. On note $\mathfrak{p}^+$ (resp. $\mathfrak{p}^-$) l'espace tangent holomorphe (resp. antiholomorphe) de X au point x_0.

Soit T un tore maximal de K d'algèbre $\mathfrak{t}$: c'est un sous-groupe de Cartan de G. On note Φ l'ensemble des racines non nulles de $\mathfrak{g}_c$ par rapport à la sous-algèbre de Cartan $\mathfrak{t}_c$. Une racine $\alpha \in \Phi$ est dite compacte (resp. non compacte) si l'espace radiciel $\mathfrak{g}_c^\alpha$ est contenu dans $\mathfrak{k}_c$ (resp. $\mathfrak{p}_c$).

On choisit un ordre sur Φ tel qu'une racine non compacte α soit positive si et seulement si $\mathfrak{g}_c^\alpha \subset \mathfrak{p}^+$. On note désormais Φ^+ l'ensemble des racines non compactes positives.

Soit B la forme de Killing de $\mathfrak{g}_c$. A tout $\alpha \in \Phi^+$ on associe le vecteur coracine H_α et deux vecteurs radiciels $E_\alpha \in \mathfrak{g}_c^\alpha$ et $E_{-\alpha} \in \mathfrak{g}_c^{-\alpha}$ de manière à satisfaire

$$[E_\alpha, E_{-\alpha}] = H_\alpha, \qquad \sigma(E_\alpha) = E_{-\alpha}.$$

Alors on a nécessairement $\alpha(H_\alpha) = 2$ et

$$B(E_\alpha, E_{-\alpha}) = \frac{2}{(\alpha, \alpha)}.$$

On dit que deux racines α et β sont fortement orthogonales si $\alpha + \beta$ et $\alpha - \beta$ ne sont pas racines. Soit $l = \operatorname{rang} X$. Il existe un ensemble maximal de racines non compactes positives fortement orthogonales $\{\gamma_1, ..., \gamma_l\}$ tel que $\gamma_1 < \gamma_2 < \cdots < \gamma_l$. On pose

$$E_0 = \sum_{k=1}^{l} E_{\gamma_k}, \qquad H_0 = \sum_{k=1}^{l} H_{\gamma_k}.$$

On note $\mathfrak{a}$ la sous-algèbre abélienne engendrée sur $\mathbb{R}$ par les vecteurs $\{X_{\gamma_k} = E_{\gamma_k} + E_{-\gamma_k}, k = 1, ..., l\}$. C'est une sous-algèbre de Cartan de la paire symétrique $(\mathfrak{g}, \mathfrak{k})$. On note $\mathfrak{a}^+$ la chambre de Weyl positive de $\mathfrak{a}$ définie par

$$\mathfrak{a}^+ = \left\{ \sum_{k=1}^{l} t_k X_{\gamma_k}, 0 < t_1 < t_2 < \cdots < t_l \right\}.$$

2.2. *Réalisation bornée d'Harish-Chandra*

Soit G_c le groupe adjoint de $\mathfrak{g}_c$: G s'identifie au sous-groupe analytique de G_c d'algèbre $\mathfrak{g}$. On note K_c, $P^\pm$, U les sous-groupes analytiques de G_c d'algèbre $\mathfrak{k}_c$, $\mathfrak{p}^\pm$, $\mathfrak{u}$.

On a $U \cap K_c P^- = K$ et l'application $uK \to uK_c P^-$ identifie l'espace homogène complexe $G_c/K_c P^-$ à l'espace hermitien symétrique compact $X^* = U/K$ dual de X.

On a $G \cap K_c P^- = K$ et l'application $gK \to gK_c P^-$ est un plongement holomorphe de X dans X^*. On note désormais x_0 la classe de l'identité dans X^* et on identifie X à l'orbite Gx_0 de X^*.

On a $P^+ \cap K_c P^- = \{1\}$ et l'application $\xi: Z \to \exp Z \cdot x_0$ est un plongement holomorphe de $\mathfrak{p}^+$ dans X^* (plongement d'Harish-Chandra). L'ouvert $\xi(\mathfrak{p}^+)$ est dense dans X^* et contient X. L'image inverse $D = \xi^{-1}(X)$ est la réalisation bornée canonique de X d'Harish-Chandra [3].

2.3. *Bord de Shilov*

Soit S le bord de Shilov de X dans X^*. Si l'on pose

$$c = \exp\left(\frac{\pi}{4}(\overline{E_0} - E_0)\right),$$

on a $S = Kcx_0$. On dit que $c \in U$ est la transformation de Cayley. On a $\xi(-E_0) = cx_0$ et l'application ξ étant K_c-équivariante, le bord de Shilov de D dans $\mathfrak{p}^+$ est $\xi^{-1}(S) = \operatorname{Ad} K \cdot E_0$.

Soit L le sous-groupe d'isotropie de K au point cx_0, d'algèbre $\mathfrak{l}$. On a $S = K/L$ et le sous-groupe L est l'ensemble des points fixes dans K de l'automorphisme intérieur $\tilde{\tau} = \operatorname{Int} c^2$ de U. Il n'est pas en général connexe. On note $\tau = \operatorname{Ad} c^2$.

L'automorphisme $\tilde{\tau}$ est un automorphisme involutif de K, et la paire (K, L) une paire symétrique compacte définie par $\tilde{\tau}$. On note $\mathfrak{k} = \mathfrak{l} \oplus \mathfrak{q}$ la décomposition de $\mathfrak{k}$ en sous-espaces propres de l'automorphisme involutif τ: $\mathfrak{l}$ (resp. $\mathfrak{q}$) est le sous-espace propre de $\mathfrak{k}$ pour la valeur propre $+1$ (resp. -1) de τ.

On note $\mathfrak{h}$ la sous-algèbre abélienne engendrée sur $\mathbb{R}$ par les vecteurs $\{iH_{\gamma_k}, k = 1,..., l\}$: c'est une sous-algèbre de Cartan de la paire symétrique $(\mathfrak{k}, \mathfrak{l})$.

3. Algèbres de Jordan

On note désormais $\mathfrak{e}^+$ le sous-espace de $\mathfrak{p}^+$ engendré sur $\mathbb{R}$ par les vecteurs $\{E_{\gamma_1},..., E_{\gamma_l}\}$ et $\mathfrak{r}^+$ le sous-espace de $\mathfrak{p}^+$ défini par $\mathfrak{r}^+ = \mathfrak{p}^+ \cap \operatorname{Ad} c(\mathfrak{g})$. Alors on sait [11, p. 278 et 282] que $\mathfrak{r}^+$ est une forme réelle de $\mathfrak{p}^+$ et qu'on a $\mathfrak{r}^+ = \operatorname{Ad} L \cdot \mathfrak{e}^+$.

La proposition suivante est un résultat classique (voir par exemple [13, Lemma 2.1, p. 181]). Rappelons que la paire $(\mathfrak{k}, \mathfrak{l})$ étant une paire symétrique, on a $\mathfrak{q} = \operatorname{Ad} L \cdot \mathfrak{h}$.

Proposition 1. *L'application ψ: $\mathfrak{p}^+ \to \mathfrak{q}_c$ définie par*

$$\psi(X) = [X, \overline{E_0}], \qquad \psi^{-1}(X) = \tfrac{1}{2}[X, E_0]$$

est un isomorphisme Ad *L-équivariant de $\mathfrak{p}^+$ sur $\mathfrak{q}_c$ (resp. de $\mathfrak{r}^+$ sur $i\mathfrak{q}$, de $\mathfrak{e}^+$ sur $i\mathfrak{h}$). En particulier pour tout $k = 1,..., l$ on a $\psi(E_{\gamma_k}) = H_{\gamma_k}$.*

Pour tous $X, Y, Z \in \mathfrak{p}^+$ on pose désormais

$$\{X, Y, Z\} = \tfrac{1}{2}[X, [\bar{Y}, Z]].$$

On a $\{X, Y, Z\} = \{Z, Y, X\} \in \mathfrak{p}^+$. On sait [10, Sect. 1.2.7, p. 19] que la loi

$$(X, Y) \to X \cdot Y = \{X, E_0, Y\}$$

munit $\mathfrak{p}^+$ d'une structure d'algèbre de Jordan complexe dont l'élément unité est E_0. La forme réelle $\mathfrak{r}^+$ est une sous-algèbre de Jordan formellement réelle [9, Sect. 6.4, p. 104] de $\mathfrak{p}^+$. En ce qui concerne les algèbres de Jordan, nous renvoyons le lecteur à [9] ou [10].

On note $X \to \tilde{X}$ la conjugaison dans $\mathfrak{p}^+$ par rapport à la forme réelle $\mathfrak{r}^+$. Les résultats suivants sont démontrés dans [16] (Propositions 2,4 et 5).

PROPOSITION 2. (a) *Pour tout* $X \in \mathfrak{p}^+$ *on a*

$$\tilde{X} = \{E_0, X, E_0\} \qquad \textit{et} \qquad \psi(\tilde{X}) = -\overline{\psi(X)}.$$

(b) *Pour tous* $X, Y \in \mathfrak{p}^+$ *on a*

$$X \cdot \tilde{Y} = \{E_0, Y, X\}.$$

Remarque 1. Compte-tenu de la Proposition 1 on a

$$X \cdot Y = \tfrac{1}{2}[\psi(X), Y].$$

En termes d'algèbres de Jordan, l'application $X \to \frac{1}{2}\mathrm{ad}\, \psi(X)$ n'est autre que la translation à gauche L qui à tout $X \in \mathfrak{p}^+$ associe l'endomorphisme $L(X)$ défini par $L(X)\, Y = X \cdot Y$.

PROPOSITION 3. *Pour tous* $X, Y \in \mathfrak{p}^+$ *la décomposition de* $[X, \bar{Y}] \in \mathfrak{k}_c$ *suivant* $\mathfrak{k}_c = \mathfrak{l}_c \oplus \mathfrak{q}_c$ *est donnée par*

$$[X, \bar{Y}] = \tfrac{1}{2}[\psi(X), \psi(\tilde{Y})] + \psi(X \cdot \tilde{Y}).$$

Preuve. Le premier terme appartient clairement à $[\mathfrak{q}_c, \mathfrak{q}_c] \subset \mathfrak{l}_c$, et le second à $\mathfrak{q}_c$. Pour établir la relation, on remarque qu'en vertu de la Proposition 2 celle-ci s'écrit

$$2[\bar{Y}, X] = [[\overline{E_0}, X], [E_0, \bar{Y}]] + [\overline{E_0}, [E_0, [\bar{Y}, X]]].$$

Mais l'identité de Jacobi entraîne

$$\begin{aligned}[][[\overline{E_0}, X], [E_0, \bar{Y}]] &= -[E_0, [\bar{Y}, [\overline{E_0}, X]]] + [\bar{Y}, [[X, \overline{E_0}], E_0]] \\ &= [E_0, [\overline{E_0}, [X, \bar{Y}]]] + 2[\bar{Y}, X],\end{aligned}$$

car le second terme du membre de droite s'écrit $2[\bar{Y}, \psi^{-1}(\psi(X))]$. Maintenant on a

$$[E_0, [\overline{E_0}, [X, \bar{Y}]]] = -[\overline{E_0}, [E_0, [\bar{Y}, X]]] - [[X, \bar{Y}], [E_0, \overline{E_0}]].$$

Mais le dernier terme est nul car $[X, \bar{Y}] \in \mathfrak{k}_c$ et $[E_0, \overline{E_0}] = H_0 \in i\mathfrak{z}$. Ceci prouve l'assertion. ∎

La structure d'algèbre de Jordan munit $\mathfrak{p}^+$ d'une opération "produit triple de Jordan" ainsi définie:

$$[X, Y, Z] = X\cdot(Y\cdot Z) + Z\cdot(Y\cdot X) - Y\cdot(X\cdot Z).$$

PROPOSITION 4. *Pour tous* $X, Y, Z \in \mathfrak{p}^+$ *on a*

$$\{X, Y, Z\} = [X, \tilde{Y}, Z].$$

Preuve. En vertu de la Proposition 3 on a

$$\begin{aligned}\{X, Y, Z\} &= \tfrac{1}{2}[\psi(X\cdot \tilde{Y}), Z] - \tfrac{1}{4}[Z, [\psi(X), \psi(\tilde{Y})]]\\ &= (X\cdot\tilde{Y})\cdot Z - \tfrac{1}{4}[Z, [\psi(X), \psi(\tilde{Y})]],\end{aligned}$$

où on a utilisé la Remarque 1. Mais on a en vertu de la même remarque

$$\begin{aligned}\tfrac{1}{4}[Z, [\psi(X), \psi(\tilde{Y})]] &= -\tfrac{1}{4}[\psi(X), [\psi(\tilde{Y}), Z]] + \tfrac{1}{4}[\psi(\tilde{Y}), [\psi(X), Z]]\\ &= -\tfrac{1}{2}[\psi(X), \tilde{Y}\cdot Z] + \tfrac{1}{2}[\psi(\tilde{Y}), X\cdot Z]\\ &= -X\cdot(\tilde{Y}\cdot Z) + \tilde{Y}\cdot(X\cdot Z).\end{aligned}$$

Ceci achève la preuve. ∎

Soit A un élément Jordan-inversible de $\mathfrak{p}^+$, d'inverse A^{-1}. On sait [9, Sect. 4.2, p. 67] que la loi

$$(X, Y) \to X \underset{A}{\cdot} Y = [X, A, Y]$$

munit $\mathfrak{p}^+$ d'une structure d'algèbre de Jordan complexe dont l'élément unité est A^{-1}. On note $\mathfrak{p}_A^+$ cette nouvelle algèbre de Jordan qu'on appelle A-mutation (ou A-isotope) de $\mathfrak{p}^+$.

Supposons en outre $A \in \mathfrak{r}^+$. Alors on a $A = \tilde{A}$, d'où

$$X \underset{A}{\cdot} Y = \{X, A, Y\}.$$

On définit de même la A-mutation de $\mathfrak{r}^+$, qu'on note $\mathfrak{r}_A^+$: c'est une sous-algèbre de Jordan de $\mathfrak{p}_A^+$.

Soit Ω la composante connexe de E_0 dans l'ensemble des éléments Jordan-inversibles de $\mathfrak{r}^+$. Alors Ω est un cône homogène autodual ("domaine de positivité"). Pour tout $A \in \Omega$ la mutation $\mathfrak{r}_A^+$ est une sous-algèbre de Jordan *formellement réelle* de $\mathfrak{p}_A^+$.

4. Les équations de Hua

Soient $\{E_i\}$ une base de $\mathfrak{p}^+$ et $\{E_i^*\}$ la base de $\mathfrak{p}^-$ duale de la précédente pour la forme de Killing. Soit $\mathscr{U}(\mathfrak{g}_c)$ l'algèbre enveloppante de $\mathfrak{g}_c$. Comme on a $[\mathfrak{p}^+, \mathfrak{p}^-] \subset \mathfrak{k}_c$, l'opérateur

$$\mathscr{H} = \sum_{i,j} E_i E_j^* \otimes [E_j, E_i^*]$$

est un élément de $\mathscr{U}(\mathfrak{g}_c) \otimes \mathfrak{k}_c$. On vérifie qu'il ne dépend pas de la base de $\mathfrak{p}^+$ choisie.

Pour tous $X, Y \in \mathfrak{p}^+$ on pose $\langle X, Y \rangle = -B(X, \nu Y)$, où ν désigne la conjugaison dans $\mathfrak{g}_c$ par rapport à la forme réelle compacte $\mathfrak{u}$. En vertu d'un résultat classique, on définit ainsi une forme hermitienne définie positive sur $\mathfrak{p}^+$. La restriction de $\langle \, , \rangle$ à $\mathfrak{r}^+$ est une forme bilinéaire définie positive.

On choisit désormais, *et pour toute la suite de cet article*, une base $\{E_i\}$ de $\mathfrak{p}^+$ *orthonormée* par rapport à $\langle \, , \rangle$. La base $\{\overline{E_i}\}$ de $\mathfrak{p}^-$ qui s'en déduit par conjugaison est alors duale de la base $\{E_i\}$ pour la forme de Killing. En effet si θ désigne l'involution de Cartan de la paire $(\mathfrak{g}, \mathfrak{k})$, on a $\sigma = \nu\theta$. D'où $\nu(E_i) = -\overline{E_i}$ et $B(E_i, \overline{E_j}) = \langle E_i, E_j \rangle = \delta_{ij}$. On en déduit

$$\mathscr{H} = \sum_{i,j} E_i \overline{E_j} \otimes [E_j, \overline{E_i}].$$

Soient $\mathscr{H}_\mathfrak{q}$ et $\mathscr{H}_\mathfrak{l}$ les éléments de $\mathscr{U}(\mathfrak{g}_c) \otimes \mathfrak{q}_c$ et $\mathscr{U}(\mathfrak{g}_c) \otimes \mathfrak{l}_c$ qui se déduisent de $\mathscr{H}$ au moyen de la décomposition $\mathfrak{k}_c = \mathfrak{l}_c \oplus \mathfrak{q}_c$. En vertu de la Proposition 3, on a alors

$$\mathscr{H}_\mathfrak{q} = \sum_{i,j} E_i \overline{E_j} \otimes \psi(E_j \cdot \widetilde{E_i}),$$

$$\mathscr{H}_\mathfrak{l} = \tfrac{1}{2} \sum_{i,j} E_i \overline{E_j} \otimes [\psi(E_j), \psi(\widetilde{E_i})].$$

L'isomorphisme $\psi \colon \mathfrak{p}^+ \to \mathfrak{q}_c$ induit un isomorphisme (encore noté ψ) de $\mathscr{U}(\mathfrak{g}_c) \otimes \mathfrak{p}^+$ sur $\mathscr{U}(\mathfrak{g}_c) \otimes \mathfrak{q}_c$. En particulier l'élément de $\mathscr{U}(\mathfrak{g}_c) \otimes \mathfrak{p}^+$ défini par

$$\mathscr{J} = \sum_{i,j} E_i \overline{E_j} \otimes E_j \cdot \widetilde{E_i}$$

se déduit de $\mathscr{H}_\mathfrak{q}$ par l'isomorphisme ψ^{-1}. On a

$$\mathscr{H} = \mathscr{H}_\mathfrak{l} + \mathscr{H}_\mathfrak{q} = \mathscr{H}_\mathfrak{l} + \psi(\mathscr{J}).$$

Soient $A = \exp \mathfrak{a}$ le sous-groupe analytique de G d'algèbre $\mathfrak{a}$ et $A^+ = \exp \mathfrak{a}^+$. On a $G = K\overline{A^+}K$. Soit B le sous-groupe d'isotropie de G au point cx_0. On a $G = BK$ [11, p. 280]. Les conditions suivantes sont alors équivalentes:

$$\begin{aligned} \mathscr{H}\tilde{f}(g) &= 0 \qquad (g \in G), \\ \mathscr{H}\tilde{f}(g) &= 0 \qquad (g \in K\overline{A^+}), \\ \mathscr{H}\tilde{f}(g) &= 0 \qquad (g \in B). \end{aligned}$$

En effet on voit facilement qu'on a pour tous $g \in G$ et $k \in K$,

$$\mathscr{H}\tilde{f}(gk) = \operatorname{Ad} k^{-1}(\mathscr{H}\tilde{f}(g)).$$

D'où l'assertion.

En ce qui concerne l'opérateur $\mathscr{I}$ une telle propriété n'est plus a priori vérifiée. Pour tout $g \in G$ on voit en effet facilement qu'on a

$$\mathscr{I}\tilde{f}(gk) = \operatorname{Ad} k^{-1}(\mathscr{I}\tilde{f}(g))$$

seulement lorsque $k \in L$. Cependant nous allons démontrer dans cet article le résultat suivant.

THÉORÈME 1. *Soit f une fonction C^∞* bornée *sur X. La fonction f est la transformée de Poisson d'une fonction sur le bord de Shilov S si et seulement si elle satisfait l'une des trois conditions équivalentes suivantes*:

(i) $\mathscr{I}\tilde{f}(g) = 0 \ (g \in G)$,

(ii) $\mathscr{I}\tilde{f}(g) = 0 \ (g \in B)$,

(iii) $\mathscr{I}\tilde{f}(g) = 0 \ (g \in K\overline{A^+})$.

Nous formulons la conjecture que la restriction "fonction bornée" est inessentielle.

Le théorème sera établi de la façon suivante. Nous allons démontrer, *de manière indépendante*, que chacune des conditions (i), (ii) et (iii) caractérise les fonctions bornées qui sont intégrales de Poisson du bord de Shilov. En ce qui concerne la condition (i), le résultat est *déjà connu*: nous l'avons démontré dans [16] et la restriction "fonction bornée" n'est pas alors nécessaire. En ce qui concerne les conditions (ii) et (iii), chacune est équivalente à des équations que nous nous donnerons dans une *réalisation particulière* (bornée ou non bornée) de X. Et c'est sous cette forme que nous les démontrerons.

Remarque 2. Toute fonction f sur X satisfaisant l'une des deux conditions (ii) ou (iii) est nécessairement solution du laplacien $\mathscr{L}$ de X, c'est-à-dire *faiblement G-harmonique*. En effet soit $g \in G$ arbitraire. On sait [16, Remarque 1, p. 135] que la condition $\mathscr{J}\tilde{f}(g)=0$ implique $\mathscr{L}\tilde{f}(g)=0$. Soit encore $\mathscr{L}\tilde{f}(gk)=0$ pour tout $k \in K$, en vertu de la K-invariance à droite de $\tilde{f}$ et du laplacien.

Nous notons que la restriction "fonction bornée" pourrait être écartée dans l'énoncé du Théorème 1 si l'on savait démontrer la

CONJECTURE. *Toute solution de l'une des deux conditions* (ii) *ou* (iii) *est G-harmonique.*

Le Théorème 1 sera établi en ce qui concerne la condition (ii), par la Proposition 6 et le Théorème 2; et en ce qui concerne la condition (iii), par la Proposition 14 et le Théorème 4.

5. LES ÉQUATIONS DE HUA EN RÉALISATION NON BORNÉE

Dans cette section nous énonçons le Théorème 1 (condition (ii)) en nous plaçant dans la réalisation non bornée canonique de X comme "demi-plan généralisé," due à Korányi et Wolf [11].

5.1. *Demi-plan généralisé*

On note (K^*, L^0) la paire symétrique non compacte duale de la paire (K, L): L^0 est la composante neutre de L et K^* le sous-groupe analytique de G_c d'algèbre $\mathfrak{k}^* = \mathfrak{l} + i\mathfrak{q}$. Le groupe K^* opère sur $\mathfrak{r}^+$ par la représentation adjointe et l'orbite

$$\operatorname{Ad} K^* \cdot E_0 = K^*/L_0$$

est exactement le cône Ω, domaine de positivité de l'algèbre de Jordan formellement réelle $\mathfrak{r}^+$.

L'ouvert cX est contenu dans l'ouvert d'Harish-Chandra $\xi(\mathfrak{p}^+)$. L'image inverse $\mathscr{T} = -i\xi^{-1}(cX)$ est exactement le tube

$$\mathscr{T} = \mathfrak{r}^+ \oplus i\Omega.$$

On a $iE_0 = -i\xi^{-1}(cx_0)$ et $\mathfrak{r}^+ = -i\xi^{-1}(c\check{S})$, où $\check{S}$ est un ouvert dense de S. Le groupe G opère sur $\mathscr{T}$ par la loi $g(Z) = -i\xi^{-1}(cgc^{-1}\xi(iZ))$ et on a $\mathscr{T} = G(iE_0) = G/K$. Pour les démonstrations voir [11, Sect. 6, p. 281].

5.2. *Coordonnées cartésiennes*

On identifie désormais l'espace $\mathfrak{p}^+$ à son dual au moyen de la forme hermitienne $\langle \, , \rangle$. Soient $\{E_i\}$ une base *orthonormée* (donc autoduale) de $\mathfrak{p}^+$, et $\{z_i\}$ les coordonnées correspondantes. On pose

$$\partial = \sum_i \frac{\partial}{\partial z_i} \otimes \widetilde{E_i},$$

$$\bar{\partial} = \sum_i \frac{\partial}{\partial \bar{z}_i} \otimes E_i.$$

On identifie ainsi les opérateurs ∂ et $\bar{\partial}$ à des opérateurs différentiels sur $\mathfrak{p}^+$ à valeur dans les sections du fibré cotangent complexe de $\mathfrak{p}^+$.

Soit $A \in \Omega$ arbitraire. On pose

$$\partial \underset{A}{\cdot} \bar{\partial} = [\partial, A, \bar{\partial}] = \sum_{i,j} \frac{\partial^2}{\partial z_i \partial \bar{z}_j} \otimes [\widetilde{E_i}, A, E_j],$$

où la loi $(X, Y) \to X \underset{A}{\cdot} Y = [X, A, Y] = \{X, A, Y\}$ est le produit de Jordan dans l'algèbre de Jordan A-isotope de $\mathfrak{p}^+$.

On a en particulier

$$\partial \underset{E_0}{\cdot} \bar{\partial} = \sum_{i,j} \frac{\partial^2}{\partial z_i \partial \bar{z}_j} \otimes E_j \cdot \widetilde{E_i}.$$

L'opérateur $\partial \underset{A}{\cdot} \bar{\partial}$ n'est autre que le "contracté" de l'opérateur différentiel $\partial \otimes \bar{\partial}$ par l'application linéaire $X \otimes Y \to X \underset{A}{\cdot} Y$ de $\mathfrak{p}^+ \otimes \mathfrak{p}^+$ dans $\mathfrak{p}^+$. Il est en particulier indépendant de la base choisie.

Pour simplifier les notations, on note dans toute la suite ∂_i pour $\partial/\partial z_i$, $\bar{\partial}_j$ pour $\partial/\partial \bar{z}_j$ et $\partial_i \bar{\partial}_j$ pour $\partial^2/\partial z_i \partial \bar{z}_j$.

5.3. *Equations de Hua*

Soient B le sous-groupe d'isotropie de G au point cx_0 et B^0 la composante neutre de B. On sait [11, p. 280] que B et B^0 sont transitifs sur $\mathcal{T}$. On a $B = B^0 L$ et $B^0 = \operatorname{Int} c^{-1}(R^+ K^*)$, avec $R^+ = \exp \mathfrak{r}^+$.

Soit alors $Z = X + iY$ un point de $\mathcal{T}$ arbitraire. Comme la paire (K^*, L^0) est symétrique, on a la décomposition de Cartan $K^* = (\exp i\mathfrak{q})\, L^0$. Soit q_Y l'unique élément de $\exp i\mathfrak{q}$ tel que $Y \in \Omega = K^*/L^0$ s'écrive $Y = \operatorname{Ad} q_Y \cdot E_0$. On a $Z = X + iY = g_{X,Y}(iE_0)$, où $g_{X,Y}$ est l'unique élément de $\operatorname{Int} c^{-1}(R^+ \cdot (\exp i\mathfrak{q})) \subset B^0$ défini par $g_{X,Y} = \operatorname{Int} c^{-1}(\exp X \cdot q_Y)$.

Proposition 5. *Soient f une fonction C^∞ sur $\mathcal{T}$ et $\tilde{f}$ la fonction sur G correspondante. Pour tout $Z = X + iY \in \mathcal{T}$, soient $q_Y \in \exp i\mathfrak{q}$ et $g_{X,Y} \in B^0$ définis comme précédemment. Alors on a*

$$\mathscr{J}\tilde{f}(g_{X,Y}) = \operatorname{Ad} q_Y([\partial, Y, \bar{\partial}]\, f(Z)).$$

Preuve. Remarquons d'abord qu'on a

$$\mathscr{J}\tilde{f}(g_{X,Y}) = \mathscr{J}(\tilde{f} \circ g_{X,Y})(1) = [\partial, E_0, \bar{\partial}](f \circ g_{X,Y})(iE_0).$$

Soient $\mu(g_{X,Y})$ la différentielle de la translation par $g_{X,Y}$ au point iE_0 et $\mu^*(g_{X,Y})$ son adjoint par rapport à la forme hermitienne $\langle\,,\rangle$. Par un calcul élémentaire on a $\mu(g_{X,Y}) = \mu^*(g_{X,Y}) = \operatorname{Ad} q_Y$. On en déduit

$$[\partial, E_0, \bar\partial](f\circ g_{X,Y})(iE_0) = [\operatorname{Ad} q_Y\cdot\partial, E_0, \operatorname{Ad} q_Y\cdot\bar\partial]\, f(Z)$$

$$= \sum_{j,k} \partial_j\,\bar\partial_k f(Z)[\operatorname{Ad} q_Y\cdot \widetilde{E_j}, [\overline{E_0}, \operatorname{Ad} q_Y\cdot E_k]].$$

Maintenant on a

$$\begin{aligned}[\operatorname{Ad} q_Y\cdot\widetilde{E_j}, [\overline{E_0}, \operatorname{Ad} q_Y\cdot E_k]] &= \operatorname{Ad} q_Y([\widetilde{E_j}, [\operatorname{Ad} q_Y^{-1}\cdot\overline{E_0}, E_k]])\\ &= \operatorname{Ad} q_Y([\widetilde{E_j}, [\bar Y, E_k]]),\end{aligned}$$

car $q_Y \in \exp i\mathfrak{q}$ implique $\overline{q_Y} = q_Y^{-1}$. D'où l'assertion. ∎

PROPOSITION 6. *Les conditions suivantes sont équivalentes*:

(i) $\mathscr{J}\tilde f(g) = 0 \qquad (g\in B)$,

(ii) $[\partial, Y, \bar\partial] f(Z) = 0 \qquad (Z = X+iY\in\mathscr{T})$.

Preuve. La Proposition 5 implique l'équivalence de (ii) et de la condition

(iii) $\mathscr{J}\tilde f(g) = 0 \qquad (g\in \operatorname{Int} c^{-1}(R^+\cdot(\exp i\mathfrak{q})))$.

Mais on a $\operatorname{Int} c^{-1}\cdot L^0 = L^0$ et $B = B^0 L$. D'où

$$B = \operatorname{Int} c^{-1}(R^+\cdot(\exp i\mathfrak{q}))\cdot L.$$

D'autre part on a par un calcul élémentaire

$$\mathscr{J}\tilde f(gl) = \operatorname{Ad} l^{-1}(\mathscr{J}\tilde f(g))$$

pour tous $g\in G$ et $l\in L$. D'où (i)⇔(iii). ∎

Nous sommes alors en mesure de démontrer le résultat suivant.

THÉORÈME 2. *Soit f une fonction C^∞* bornée *sur le tube $\mathscr{T} = \mathfrak{r}^+ \oplus i\Omega$. La fonction f est la transformée de Poisson d'une fonction sur le bord de Shilov de $\mathscr{T}$ si et seulement si on a pour tout $Z = X+iY\in\mathscr{T}$,*

$$[\partial, Y, \bar\partial] f(X+iY) = 0.$$

En vertu de la Proposition 6, la condition est évidemment nécessaire puisque la condition $\mathscr{J}\tilde f = 0$ l'est déjà. La démonstration que la condition est suffisante sera donnée à la Section 7. Auparavant nous allons donner une seconde formulation du Théorème 2, moins explicite mais valable également en réalisation bornée.

6. Les équations de Hua en réalisation bornée ou non bornée

Soient $\{E_i\}$ une base de $\mathfrak{p}^+$ *orthonormée* pour la forme hermitienne $\langle\,,\rangle$ et $\{z_i\}$ les coordonnées correspondantes. La forme de Killing permet d'identifier $\mathfrak{p}^-$ au dual de $\mathfrak{p}^+$. La base $\{\overline{E_i}\}$ est alors la base de $\mathfrak{p}^-$ duale de la base $\{E_i\}$. Avec cette convention on pose

$$\partial = \sum_i \partial_i \otimes \overline{E_i},$$

$$\bar{\partial} = \sum_i \bar{\partial}_i \otimes E_i.$$

Soit D (resp. $\mathscr{T}$) la réalisation bornée (resp. non bornée) de $X = G/K$. Le groupe G opère sur D ou $\mathscr{T}$. Pour tout $g \in G$ et tout $z \in D$ (resp. $z \in \mathscr{T}$), on introduit le "facteur d'automorphie" $\mu(g, z)$ en posant

$$\partial f(gz) = \mu(g, z)\, \partial(f \circ g)(z),$$
$$\bar{\partial} f(gz) = \overline{\mu(g, z)}\, \bar{\partial}(f \circ g)(z).$$

Le facteur d'automorphie $\mu(g, z)$ *dépend* de la réalisation (bornée ou non bornée) qu'on considère. On a $\mu(g, z) \in \operatorname{Ad} K_c$ et l'adjoint de $\mu(g, z)$ pour la forme hermitienne $\langle\,,\rangle$ est donné par

$$\mu(g, z)^* = \overline{\mu(g, z)^{-1}}.$$

Soit $z \in D$ (resp. $z \in \mathscr{T}$) arbitraire. On a $z = g(0)$ (resp. $z = g(iE_0)$) avec $g \in G$. On pose

$$b(z) = \mu(g, 0)\, \mu(g, 0)^*$$
$$(\text{resp. } b(z) = \mu(g, iE_0)\, \mu(g, iE_0)^*).$$

On vérifie facilement que cette définition est indépendante du choix de g dans la classe gK. Pour tout $z \in D$ (resp. $z \in \mathscr{T}$), $b(z)$ est alors un endomorphisme de $\mathfrak{p}^+$ hermitien défini positif pour la forme $\langle\,,\rangle$. On note $b^{1/2}(z)$ sa racine carrée.

Soit $\mathscr{S}(\mathfrak{p}_c)$ l'algèbre des opérateurs différentiels à coefficients constants sur $\mathfrak{p}_c$. Soit A un endomorphisme arbitraire de $\mathfrak{p}^+$. Celui-ci induit un endomorphisme (encore noté A) de $\mathscr{S}(\mathfrak{p}_c) \otimes \mathfrak{p}^+$, et on a en particulier

$$A\bar{\partial} = \sum_i \bar{\partial}_i \otimes AE_i.$$

On étend désormais la conjugaison $Z \to \tilde{Z}$ de $\mathfrak{p}^+$ à $\mathscr{S}(\mathfrak{p}_c) \otimes \mathfrak{p}^+$. Alors on a

$$(A\bar{\partial})^{\sim} = \sum_i \partial_i \otimes (AE_i)^{\sim}.$$

L'algèbre $\mathscr{S}(\mathfrak{p}_c) \otimes \mathscr{U}(\mathfrak{g}_c)$ est associative. On peut donc définir de manière canonique le "crochet de Lie" de deux de ses éléments. On a en particulier

$$[A\bar{\partial}, \overline{A\bar{\partial}}] = \sum_{i,j} \partial_i \bar{\partial}_j \otimes [AE_j, \overline{AE_i}]$$

$$[\psi(A\bar{\partial}), \psi((A\bar{\partial})^{\sim})] = \sum_{i,j} \partial_i \bar{\partial}_j \otimes [\psi(AE_j), \psi((AE_i)^{\sim})].$$

De manière analogue la structure d'algèbre de Jordan de $\mathfrak{p}^+$ munit $\mathscr{S}(\mathfrak{p}_c) \otimes \mathfrak{p}^+$ d'une structure d'algèbre commutative, et on peut définir de manière canonique le "produit de Jordan"

$$(A\bar{\partial}) \cdot (A\bar{\partial})^{\sim} = \sum_{i,j} \partial_i \bar{\partial}_j \otimes (AE_j) \cdot (AE_i)^{\sim}.$$

Compte-tenu de la relation

$$\overline{b^{1/2}(z)} = b^{-1/2}(z),$$

le résultat suivant est celui démontré à la Proposition 3.2 de [8, p. 596].

PROPOSITION 7. *Les conditions suivantes sont équivalentes*:

$$\mathscr{H}\tilde{f}(g) = 0 \qquad (g \in B),$$

$$[b^{1/2}(z)\,\bar{\partial}, \overline{b^{1/2}(z)\,\bar{\partial}}]\,f(z) = 0 \qquad (z \in D \text{ ou } \mathscr{T}).$$

Le résultat analogue suivant sera utile.

PROPOSITION 8. *Les conditions suivantes sont équivalentes*:

$$\mathscr{J}\tilde{f}(g) = 0 \qquad (g \in B),$$

$$((b^{1/2}(z)\,\bar{\partial}) \cdot (b^{1/2}(z)\,\bar{\partial})^{\sim})\,f(z) = 0 \qquad (z \in D \text{ ou } \mathscr{T}).$$

Preuve. Il suffit de se placer en réalisation non bornée. Pour tout $Z = X + iY \in \mathscr{T}$ on introduit comme précédemment l'unique élément $q_Y \in \exp i\mathfrak{q}$ tel que $Y = \operatorname{Ad} q_Y \cdot E_0$. Alors on a $Z = g_{X,Y}(iE_0)$, avec $g_{X,Y} = \operatorname{Int} c^{-1}(\exp X \cdot q_Y) \in B^0$. Par un calcul élémentaire on voit que

$\mu(g_{X,Y}, iE_0) = \operatorname{Ad} q_Y$. D'où $b(Z) = \operatorname{Ad} q_Y^2$ et $b^{1/2}(Z) = \operatorname{Ad} q_Y$, car on a $\overline{q_Y} = q_Y^{-1}$.

La seconde condition s'écrit alors

$$\sum_{i,j} \partial_i \bar{\partial}_j f(Z) [(\operatorname{Ad} q_Y \cdot E_i)^{\sim}, [\overline{E_0}, \operatorname{Ad} q_Y \cdot E_j]] = 0.$$

Comme le groupe $\operatorname{Ad} K^*$ laisse stable $\mathfrak{r}^+$, on a $(\operatorname{Ad} q_Y \cdot E_i)^{\sim} = \operatorname{Ad} q_Y \cdot \widetilde{E_i}$. La seconde condition s'écrit donc

$$\sum_{i,j} \partial_i \bar{\partial}_j f(Z) \operatorname{Ad} q_Y([\widetilde{E_i}, [\operatorname{Ad} q_Y^{-1} \cdot \overline{E_0}, E_j]]) = \operatorname{Ad} q_Y([\partial, Y, \bar{\partial}] f(Z)) = 0.$$

On applique alors la Proposition 6. ▮

PROPOSITION 9. *Les conditions suivantes sont équivalentes*:

$$\mathscr{H}_1 \tilde{f}(g) = 0 \qquad (g \in B),$$
$$[\psi(b^{1/2}(z)\, \bar{\partial}), \psi((b^{1/2}(z)\, \bar{\partial})^{\sim})] f(z) = 0 \qquad (z \in D \text{ ou } \mathscr{T}).$$

Preuve. En vertu de la Proposition 3, et compte-tenu des notations adoptées, on a

$$\begin{aligned}[b^{1/2}(z)\, \bar{\partial}, \overline{b^{1/2}(z)\, \bar{\partial}}] f(z) = {} & \tfrac{1}{2} [\psi(b^{1/2}(z)\, \bar{\partial}), \psi((b^{1/2}(z)\, \bar{\partial})^{\sim})] f(z) \\ & + \psi\big((b^{1/2}(z)\, \bar{\partial}) \cdot (b^{1/2}(z)\, \bar{\partial})^{\sim}\big) f(z).\end{aligned}$$

Compte-tenu des Propositions 7 et 8, on reconnait ici la décomposition

$$\mathscr{H} = \mathscr{H}_1 + \psi(\mathscr{J})$$

donnée à la Section 4. D'où l'assertion. ▮

Le résultat suivant est alors une formulation implicite, en réalisation bornée et non bornée, du Théorème 2.

THÉORÈME 3. *Soit f une fonction C^∞* bornée *sur D (resp. $\mathscr{T}$). La fonction f est la transformée de Poisson d'une fonction sur le bord de Shilov si et seulement si on a pour tout $z \in D$ (resp. $\mathscr{T}$),*

$$\big((b^{1/2}(z)\, \bar{\partial}) \cdot (b^{1/2}(z)\, \bar{\partial})^{\sim}\big) f(z) = 0.$$

Preuve. On applique les Propositions 6 et 8 et le Théorème 2. ▮

7. Démonstration du théorème 2

7.1. *Notations*

On se place désormais, et pour toute la démonstration, en réalisation non bornée. Pour tout $Z = X + iY \in \mathscr{T}$, on note comme précédemment q_Y l'unique élément de $\exp i\mathfrak{q}$ tel que $\operatorname{Ad} q_Y \cdot E_0 = Y \in \Omega$. On pose $g_{X,Y} = \operatorname{Int} c^{-1}(\exp X \cdot q_Y) \in B^\circ$. Alors on a $Z = g_{X,Y}(iE_0)$, $b(Z) = \operatorname{Ad} q_Y^2$ et $b^{1/2}(Z) = \operatorname{Ad} q_Y$.

On introduit les opérateurs

$$D_0 = [\operatorname{Ad} q_Y \cdot \bar{\partial}, \overline{\operatorname{Ad} q_Y \cdot \bar{\partial}}],$$

$$D_1 = (\operatorname{Ad} q_Y \cdot \bar{\partial}) \cdot (\operatorname{Ad} q_Y \cdot \bar{\partial})^{\sim},$$

$$D_2 = [\psi(\operatorname{Ad} q_Y \cdot \bar{\partial}), \psi((\operatorname{Ad} q_Y \cdot \bar{\partial})^{\sim})].$$

En vertu des Propositions 7, 8, 9 ceux-ci correspondent respectivement aux opérateurs $\mathscr{H}$, $\mathscr{J}$, et $\mathscr{H}_1$. Par la Proposition 3 on a

$$D_0 = \tfrac{1}{2} D_2 + \psi(D_1).$$

On note désormais $M \subset L$ le centralisateur de $\mathfrak{a}$ dans K et $K/M = G/Q$ le bord maximal de Furstenberg de X. Soient f une fonction bornée sur X et $\tilde{f}$ la fonction sur G correspondante. En vertu des Propositions 6 et 8, les trois conditions suivantes sont équivalentes

$$\mathscr{J}\tilde{f}(g) = 0 \qquad (g \in B),$$

$$[\partial, Y, \bar{\partial}] f(Z) = 0 \qquad (Z = X + iY \in \mathscr{T}),$$

$$D_1 f(Z) = 0 \qquad (Z = X + iY \in \mathscr{T}).$$

Supposons alors que f satisfait une de ces conditions. En vertu de la Remarque 2, f est solution du laplacien de X. Étant bornée, on en déduit par un résultat classique de Furstenberg [2] que f est transformée de Poisson d'une fonction bornée u sur $K/M = G/Q$. C'est-à-dire:

$$\tilde{f}(g) = \int_K u(gkQ)\, dk.$$

Le Théorème 2 sera établi si nous montrons que la fonction u est définie sur K/L. Pour ceci nous allons utiliser la méthode de Johnson [6, 7, 8] et "pousser au bord" les équations $D_1 f(Z) = 0$. Nous traitons d'abord le cas particulier où u est C^∞.

7.2. *La méthode de Johnson*

Soit $X_0 = E_0 + \overline{E_0} \in \mathfrak{a}$. Soient u une fonction C^∞ bornée sur $K/M = G/Q$, et f son intégrale de Poisson définie sur $\mathscr{T}$ par

$$f(g(iE_0)) = \int_K u(gkQ)\, dk.$$

En vertu du Lemme 2.1 de [7, p. 98] la fonction

$$f^\#(g) = \lim_{t \to +\infty} f(g \cdot \exp tX_0(iE_0))$$

existe et est C^∞ sur G. On note désormais pour tout $Z = X + iY \in \mathscr{T}$,

$$u(X, Y) = f^\#(g_{X,Y})$$

et $D_k^\#$ $(k = 0, 1, 2)$ les opérateurs différentiels définis par

$$D_k^\# f^\#(g) = \lim_{t \to +\infty} D_k f(g \cdot \exp tX_0(iE_0)).$$

Ceux-ci existent en vertu du Lemme 2.9 de [7, p. 100].

Alors on sait [8, p. 603] que la fonction u est définie sur K/L si et seulement si la fonction $u(X, Y)$ est *indépendante de* Y. Les équations $D_1 f(Z) = 0$ impliquent $D_1^\# u(X, Y) = 0$. Nous sommes ainsi conduits à démontrer la

PROPOSITION 10. *Toute fonction C^∞ bornée solution de $D_1^\# u(X, Y) = 0$ est indépendante de Y.*

7.3. *Démonstration de la Proposition* 10

Les opérateurs $\mathscr{H}$ et $\mathscr{J}$ (resp. D_0 et D_1) étant *indépendants* de la base de $\mathfrak{p}^+$ choisie, nous supposons désormais que $\{E_i\}$ est une base sur $\mathbb{R}$ de la forme réelle $\mathfrak{r}^+$. On a alors $E_i = \widetilde{E_i}$, et comme le groupe K^* laisse stable $\mathfrak{r}^+$,

$$(\mathrm{Ad}\, q_Y \cdot E_i)^{\sim} = \mathrm{Ad}\, q_Y \cdot \widetilde{E_i} = \mathrm{Ad}\, q_Y \cdot E_i.$$

Le résultat suivant a été démontré dans [8, Proposition 6.4, p. 605].

PROPOSITION. *Toute fonction C^∞ bornée solution de $D_0^\# u(X, Y) = 0$ est indépendante de Y.*

Comme on a $D_0^\# = \frac{1}{2} D_2^\# + \psi(D_1^\#)$, la Proposition 10 est donc un corollaire immédiat du résultat suivant.

PROPOSITION 11. *On a* $D_2^{\#}=0$.

Preuve. On a par définition

$$D_2=\sum_{j,k}\partial_j\bar{\partial}_k\otimes[\psi(\mathrm{Ad}\,q_Y\cdot E_k),\psi((\mathrm{Ad}\,q_Y\cdot E_j)\tilde{\ })]$$

$$=\sum_{j,k}\partial_j\bar{\partial}_k\otimes[\psi(\mathrm{Ad}\,q_Y\cdot E_k),\psi(\mathrm{Ad}\,q_Y\cdot E_j)].$$

Maintenant on remarque qu'on a

$$g_{X,Y}\cdot\exp tX_0(iE_0)=X+ie^{-2t}\,Y.$$

On en déduit facilement (avec $z_k=x_k+iy_k$),

$$D_2^{\#}=\sum_{j,k}\frac{\partial^2}{\partial y_j\,\partial y_k}\otimes[\psi(\mathrm{Ad}\,q_Y\cdot E_k),\psi(\mathrm{Ad}\,q_Y\cdot E_j)].$$

Les termes du membre de droite s'éliminent deux à deux. D'où le résultat. ∎

Ceci achève la preuve de la Proposition 10 (et celle du Théorème 2) lorsque la fonction u est C^∞. Dans le cas général u est somme (au sens des distributions) de la série de ses L-types

$$u=\sum_{\lambda\in\hat{L}}\chi_\lambda*u.$$

Ici $\hat{L}$ désigne l'ensemble des classes d'équivalence des représentations irréductibles de L, χ_λ le caractère de λ, et $*$ la convolution sur L. Chaque fonction $u_\lambda=\chi_\lambda*u$ est C^∞ et bornée sur K/M. Sa transformée de Poisson s'écrit

$$f_\lambda(Z)=\chi_\lambda*f(Z)=\int_L\chi_\lambda(l)\,f(\mathrm{Ad}\,l^{-1}(Z))\,dl.$$

Maintenant les équations $D_1f(Z)=0$ sont invariantes par le groupe $\mathrm{Ad}\,L$. Elles s'écrivent en effet de manière équivalente $\mathscr{J}\tilde{f}(g)=0$ $(g\in B)$. Or on a $\mathscr{J}(\tilde{f}\circ l)(g)=\mathscr{J}\tilde{f}(lg)$ et $L\subset B$. Chaque fonction L-finie f_λ satisfait donc $D_1f_\lambda(Z)=0$. Le résultat précédent implique que u_λ est définie sur K/L. Il en est alors de même pour u, ce qui achève la preuve du Théorème 2.

7.4. *Remarque finale*

Il est intéressant de remarquer que la Proposition 10 possède une interprétation naturelle en termes d'algèbres de Jordan. Par un calcul analogue à celui de la Proposition 11, on vérifie en effet facilement qu'on a

$$\begin{aligned} D_1^{\#} &= \sum_{j,k} \frac{\partial^2}{\partial y_j \, \partial y_k} \otimes (\mathrm{Ad}\, q_Y \cdot E_j) \cdot (\mathrm{Ad}\, q_Y \cdot E_k) \\ &= \mathrm{Ad}\, q_Y \left(\sum_{j,k} \frac{\partial^2}{\partial y_j \, \partial y_k} \otimes [E_j, [\bar{Y}, E_k]] \right) \\ &= \mathrm{Ad}\, q_Y \left(\sum_{j,k} \frac{\partial^2}{\partial y_j \, \partial y_k} \otimes E_j \underset{Y}{\cdot} E_k \right). \end{aligned}$$

Le résultat de la Proposition 10 prend alors la forme suivante. *Les notations sont indépendantes des précédentes.*

Soient $\mathscr{A}$ une algèbre de Jordan formellement réelle d'élément unité e, et Ω la composante connexe de e dans l'ensemble des éléments Jordan-inversibles de $\mathscr{A}$ (domaine de positivité). Soient $\{e_i\}$ une base orthonormée de $\mathscr{A}$ et $\{y_i\}$ les coordonnées correspondantes. On note

$$d = \sum_i \frac{\partial}{\partial y_i} \otimes e_i$$

la différentielle sur $\mathscr{A}$. Pour tout $A \in \Omega$ on note $(X, Y) \to X \underset{A}{\cdot} Y$ le produit de Jordan dans l'algèbre A-isotope de $\mathscr{A}$ et

$$d \underset{A}{\cdot} d = \sum_{j,k} \frac{\partial^2}{\partial y_j \, \partial y_k} \otimes e_j \underset{A}{\cdot} e_k.$$

La Proposition 10 prend alors la forme suivante.

PROPOSITION 10 bis. *Soit f une fonction C^∞* bornée *sur le cône Ω. Si pour tout $Y \in \Omega$ on a*

$$d \underset{Y}{\cdot} d f(Y) = 0,$$

la fonction f est constante.

Il serait intéressant de disposer d'une preuve directe, strictement interne au formalisme des algèbres de Jordan.

8. LES ÉQUATIONS DE HUA EN COORDONNÉES POLAIRES

Dans cette section nous démontrons le Théorème 1 (condition (iii)) en nous plaçant dans la nouvelle réalisation canonique de X comme "domaine de Reinhardt généralisé," que nous avons donnée dans [14, 15].

8.1. *Algèbre de Jordan*

On peut transporter par ψ la structure d'algèbre de Jordan de $\mathfrak{p}^+$ sur $\mathfrak{q}_c$ en posant pour tous $X, Y \in \mathfrak{q}_c$,

$$X \cdot Y = \psi(\psi^{-1}(X) \cdot \psi^{-1}(Y)).$$

On munit désormais $\mathfrak{q}_c$ de cette structure d'algèbre de Jordan complexe, dont l'élément unité est $H_0 = \psi(E_0)$. La forme réelle $i\mathfrak{q} = \psi(\mathfrak{r}^+)$ est une sous-algèbre de Jordan formellement réelle de $\mathfrak{q}_c$. On note $[\ ,\ ,\ ]$ le produit triple de Jordan sur $\mathfrak{q}_c$ et $\omega = \psi(\Omega)$ la composante connexe de H_0 dans l'ensemble des éléments Jordan-inversibles de $i\mathfrak{q}$ (domaine de positivité).

Comme la paire $(\mathfrak{k}, \mathfrak{l})$ est symétrique, on a $i\mathfrak{q} = \mathrm{Ad}\, L \cdot i\mathfrak{h}$. Tout élément $H \in i\mathfrak{q}$ peut s'écrire

$$H = \mathrm{Ad}\, l\left(\sum_{k=1}^{l} \lambda_k H_{\gamma_k}\right).$$

On sait [9, pp. 76–78] que Ad L est le groupe des automorphismes algébriques de $\mathfrak{r}^+$ (resp. $i\mathfrak{q}$). On vérifie facilement que les vecteurs $\{E_{\gamma_k}, k = 1,..., l\}$ forment un système orthogonal complet [9, p. 83] d'idempotents de $\mathfrak{r}^+$. On en déduit que les vecteurs $\{H_{\gamma_k}, k = 1,..., l\}$ forment un système orthogonal complet d'idempotents de $i\mathfrak{q}$.

La décomposition précédente est donc la décomposition minimale de H [9, p. 86], et les scalaires $\{\lambda_k\}$ les valeurs propres de H. En particulier on a

$$\omega = \mathrm{Ad}\, L \cdot \omega^0,$$

où ω^0 est le cône de $i\mathfrak{h}$ défini par

$$\omega^0 = \left\{\sum_{k=1}^{l} \lambda_k H_{\gamma_k}, \lambda_k > 0\right\}.$$

En vertu de [9, p. 110] on peut alors définir le "sinus hyperbolique de Jordan" de $H \in i\mathfrak{q}$ en posant

$$\mathrm{Sh}\, H = \mathrm{Ad}\, l\left(\sum_{k=1}^{l} \mathrm{sh}\, \lambda_k H_{\gamma_k}\right).$$

La fonction ainsi définie est Ad L-équivariante et laisse stable ω.

8.2. *Domaine de Reinhardt généralisé*

Soit $S_c = K_c c x_0 = \xi(\mathrm{Ad}\, K_c \cdot E_0)$ l'unique K_c-orbite de X^* contenant $S = Kcx_0 = \xi(\mathrm{Ad}\, K \cdot E_0)$. Alors on a $S_c = K_c/L_c$, où L_c désigne le sous-groupe des points fixes dans K_c de l'automorphisme $\tilde{\tau} = \mathrm{Int}\, c^2$. L'orbite S_c est une complexification de $S = K/L$, et un ouvert dense de X^*.

L'application $\pi\colon K \times i\mathfrak{q} \to S_c$ définie par $\pi(k, H) = k \cdot \exp - H \cdot cx_0$ munit S_c d'une structure d'espace fibré K-homogène, de base $S = K/L$ et de fibre type $i\mathfrak{q}$:

$$S_c \sim K \times_L i\mathfrak{q}.$$

Il revient au même de dire que π identifie S_c au quotient de $K \times i\mathfrak{q}$ par la relation d'équivalence

$$(k, H) \sim (kl, \operatorname{Ad} l^{-1} \cdot H) \qquad (l \in L).$$

Soit $\mathscr{D}$ un domaine K-invariant de S_c. Alors $\mathscr{D}$ est un sous-fibré homogène de S_c. On a $\mathscr{D} = K \times_L B$, où la fibre type B est un domaine Ad L-invariant de $i\mathfrak{q}$. On dit que $\mathscr{D}$ est le "domaine de Reinhardt généralisé" de S_c de fibre type B.

Soit $\tilde{X} = Gx_0 \cap S_c$: c'est un ouvert dense de $X = Gx_0$. On a $G \cap K_c = K$ et $\tilde{X}$ est un domaine de Reinhardt généralisé de S_c. La fibre type de $\tilde{X}$ est exactement le cône ω, domaine de positivité de l'algèbre de Jordan formellement réelle $i\mathfrak{q}$:

$$\tilde{X} = K \times_L \omega.$$

L'image inverse $\xi^{-1}(S_c)$ (resp. $\xi^{-1}(\tilde{X})$) est exactement l'ensemble des éléments Jordan-inversibles de $\mathfrak{p}^+$ (resp. D). Pour les démonstrations voir [14, Sects. 3 à 6] et [15].

8.3. *Coordonnées polaires*

Soit f une fonction C^∞ sur X. On continue de noter f sa restriction à $\tilde{X}$, ouvert dense de X.

On a $\mathfrak{k}_c = \mathfrak{l}_c \oplus \mathfrak{q}_c$ et l'espace tangent de S_c au point cx_0 s'identifie à $\mathfrak{q}_c$. On considère désormais $\mathfrak{q}_c$ comme un espace vectoriel réel muni d'une structure complexe qu'on note J.

Soit $x = k\, cx_0 \in \tilde{X}$, avec $k \in K_c$. Pour tout $U \in \mathfrak{q}_c$ on pose

$$Uf(k) = \frac{d}{dt} f(k \cdot \exp tU \cdot cx_0)|_{t=0},$$

$$U^{\pm} f(k) = (U \mp iJU) f(k).$$

Les expressions ainsi définies *dépendent* du choix de k dans la classe kL_c. On identifie de la sorte les éléments de $\mathfrak{q}_c$ à des champs de vecteurs invariants à gauche sur K_c. Les éléments $U^{\pm}$ sont les champs de vecteurs complexes de type $(1, 0)$ et $(0, 1)$ associés à $U \in \mathfrak{q}_c$.

Soient $\{E_i\}$ une base de $\mathfrak{p}^+$ orthonormée par rapport à la forme $\langle\, ,\, \rangle$, et $U_i = \psi(E_i)$ la base de $\mathfrak{q}_c$ correspondante. On a

$$\begin{aligned} B(U_i, \overline{U_j}) &= B([E_i, \overline{E_0}], [\overline{E_j}, E_0]) \\ &= B(E_i, [\overline{E_0}, [\overline{E_j}, E_0]]) \\ &= -2B(E_i, \overline{E_j}) = -2\delta_{ij}. \end{aligned}$$

La base $\{U_i\}$ est donc orthonormée par rapport à la forme hermitienne $(U, V) \to -\frac{1}{2}B(U, \bar{V})$. On identifie désormais $\mathfrak{q}_c$ à son dual au moyen de cette forme. On pose

$$\partial = \sum_i U_i^+ \otimes \overline{U_i},$$

$$\bar{\partial} = \sum_i U_i^- \otimes U_i.$$

On identifie ainsi les opérateurs ∂ et $\bar{\partial}$ à des opérateurs différentiels sur $\tilde{X} \subset S_c$ à valeur dans les sections du fibré cotangent complexe de S_c.

Soit $A \in \omega$ arbitraire. On pose

$$\partial \underset{A}{\cdot} \bar{\partial} = [\partial, A, \bar{\partial}] = \sum_{i,j} U_i^+ U_j^- \otimes [\overline{U_i}, A, U_j],$$

où la loi $(U, V) \to U \underset{A}{\cdot} V = [U, A, V]$ est le produit de Jordan dans l'algèbre de Jordan A-isotope de $\mathfrak{q}_c$.

L'opérateur $\partial \underset{A}{\cdot} \bar{\partial}$ n'est autre que le "contracté" de $\partial \otimes \bar{\partial}$ par l'application linéaire $X \otimes Y \to X \underset{A}{\cdot} Y$ de $\mathfrak{q}_c \otimes \mathfrak{q}_c$ dans $\mathfrak{q}_c$. Il est en particulier indépendant de la base choisie.

8.4. *Equations de Hua*

Soit maintenant $H = \sum_{k=1}^{l} \lambda_k H_{\gamma_k}$ (avec $\lambda_k > 0$) un point de ω^0 arbitraire. Les notations suivantes seront utilisées largement dans toute cette section. Pour tout $k = 1, \ldots, l$ soit $t_k > 0$ tel que th $t_k = e^{-2\lambda_k}$. On pose

$$X_H = \sum_{k=1}^{l} t_k X_{\gamma_k} \in \mathfrak{a},$$

$$H_1 = \sum_{k=1}^{l} \operatorname{Log}(\operatorname{ch} t_k)\, H_{\gamma_k} \in i\mathfrak{h},$$

$$H_2 = \tfrac{1}{2} \sum_{k=1}^{l} \operatorname{Log}(\operatorname{sh} 2\lambda_k)\, H_{\gamma_k} \in i\mathfrak{h}.$$

Si λ et t sont deux réels positifs tels que th $t = e^{-2\lambda}$, on a la relation

$$2(\operatorname{ch} t)^2 \operatorname{sh} 2\lambda = e^{2\lambda}.$$

On en déduit

$$H = H_1 + H_2 + \tfrac{1}{2}(\operatorname{Log} 2)\, H_0.$$

Pour tout $\alpha \in \Phi^+$ on a en particulier

$$2e^{\alpha(H_1 - H)} = e^{-\alpha(H_2)}.$$

On note désormais $q_H = \exp H_2 \in K^*$ et $a_H = \exp X_H \in A$.

PROPOSITION 12. *Tout élément de $\tilde{X}$ peut s'écrire $x = k \cdot \exp - H \cdot cx_0 = k a_H x_0$ avec $k \in K$ et $H \in \omega^0$.*

Preuve. Tout élément de $\tilde{X}$ peut s'écrire $x = \pi(k, H)$ avec $k \in K$ et $H \in \omega$. Mais on a $\omega = \operatorname{Ad} L \cdot \omega^0$, d'où $x = \pi(k, H)$ avec $k \in K$ et $H \in \omega^0$. Par un calcul élémentaire dans $SL(2, \mathbb{C})$ [11, Lemme 3.5, p. 269] on a pour toute racine γ_k,

$$\xi^{-1}(\exp tX_{\gamma_k} \cdot x_0) = \operatorname{th} t E_{\gamma_k},$$
$$\xi^{-1}(\exp - \lambda H_{\gamma_k} \cdot cx_0) = e^{-2\lambda} E_{\gamma_k}.$$

En vertu de l'orthogonalité forte des racines $\{\gamma_k\}$, on en déduit $\exp - H \cdot cx_0 = a_H x_0$. D'où l'assertion. ▮

PROPOSITION 13. *Soient f une fonction C^∞ sur X et $\tilde{f}$ la fonction sur G correspondante. Soit $x = k \cdot \exp - H \cdot cx_0 \in \tilde{X}$ avec $k \in K$ et $H \in \omega^0$. On définit comme précédemment $a_H \in A$ et $q_H \in K^*$. Alors on a*

$$-\mathscr{J}\tilde{f}(ka_H) = \big(\operatorname{Ad} q_H(\psi^{-1}([\partial, \operatorname{Sh} 2H, \bar{\partial}]))\big) f(k \cdot \exp - H).$$

Preuve. On choisit désormais la base orthonormée de $\mathfrak{p}^+$ formée des vecteurs radiciels $E_\alpha^\dagger = (\tfrac{1}{2}(\alpha, \alpha))^{1/2} E_\alpha$ $(\alpha \in \Phi^+)$. On note $\{z_\alpha\}$ les coordonnées correspondantes et $U_\alpha = \psi(E_\alpha^\dagger)$ la base de $\mathfrak{q}_c$ associée.

Par un calcul élémentaire [11, p. 269], on voit que la différentielle de la translation par ka_H au point x_0 est $\operatorname{Ad}(k \cdot \exp - H_1)$. On en déduit

$$\begin{aligned} E_\alpha^\dagger \tilde{f}(ka_H) &= E_\alpha^\dagger (\tilde{f} \circ ka_H)(1) = \frac{\partial}{\partial z_\alpha}(f \circ ka_H)(x_0) \\ &= \left[\operatorname{Ad}(k \cdot \exp - H_1) \cdot \frac{\partial}{\partial z_\alpha}\right] f(x) \\ &= e^{-\alpha(H_1)} \left[\operatorname{Ad} k \cdot \frac{\partial}{\partial z_\alpha}\right] f(x). \end{aligned}$$

D'autre part on a

$$\begin{aligned}\xi(k\cdot\exp -H\cdot\exp tU_\alpha\cdot cx_0) &= \mathrm{Ad}(k\cdot\exp -H)\,\mathrm{Ad}(\exp tU_\alpha)\cdot E_0\\ &= \mathrm{Ad}(k\cdot\exp -H)(E_0+t[U_\alpha, E_0]+O(t^2))\\ &= \mathrm{Ad}(k\cdot\exp -H)(E_0+2tE_\alpha^\dagger+O(t^2)).\end{aligned}$$

On en déduit

$$\begin{aligned}U_\alpha^+ f(k\cdot\exp -H) &= \left[2\,\mathrm{Ad}(k\cdot\exp -H)\cdot\frac{\partial}{\partial z_\alpha}\right]f(x)\\ &= 2e^{-\alpha(H)}\left[\mathrm{Ad}\,k\cdot\frac{\partial}{\partial z_\alpha}\right]f(x).\end{aligned}$$

Par comparaison il vient

$$\begin{aligned}E_\alpha^\dagger f(ka_H) &= \tfrac{1}{2}e^{\alpha(H-H_1)}\,U_\alpha^+ f(k\cdot\exp -H)\\ &= e^{\alpha(H_2)}\,U_\alpha^+ f(k\cdot\exp -H).\end{aligned}$$

Ceci entraîne

$$\begin{aligned}\mathscr{I}\tilde{f}(ka_H) &= \sum_{\alpha,\beta\in\Phi^+} U_\alpha^+ U_\beta^- f(k\cdot\exp -H)\,e^{\alpha(H_2)}\,e^{\beta(H_2)}\,\widetilde{E_\alpha^\dagger}\cdot E_\beta^\dagger\\ &= \sum_{\alpha,\beta\in\Phi^+} U_\alpha^+ U_\beta^- f(k\cdot\exp -H)[\mathrm{Ad}\,q_H\cdot\widetilde{E_\alpha^\dagger}, [\overline{E_0}, \mathrm{Ad}\,q_H\cdot E_\beta^\dagger]].\end{aligned}$$

Maintenant en vertu de l'orthogonalité forte des racines $\{\gamma_k\}$, on a immédiatement

$$\begin{aligned}\mathrm{Ad}\,q_H\cdot E_0 &= \sum_{k=1}^{l}\mathrm{sh}\,2\lambda_k\,E_{\gamma_k}\\ &= \psi^{-1}(\mathrm{Sh}\,2H)\in\Omega.\end{aligned}$$

On en déduit

$$\begin{aligned}\mathscr{I}\tilde{f}(ka_H) &= \sum_{\alpha,\beta\in\Phi^+} U_\alpha^+ U_\beta^- f(k\cdot\exp -H)\,\mathrm{Ad}\,q_H([\widetilde{E_\alpha^\dagger}, [\overline{\psi^{-1}(\mathrm{Sh}\,2H)}, E_\beta^\dagger]])\\ &= \sum_{\alpha,\beta\in\Phi^+} U_\alpha^+ U_\beta^- f(k\cdot\exp -H)\,\mathrm{Ad}\,q_H([\widetilde{E_\alpha^\dagger}, \psi^{-1}(\mathrm{Sh}\,2H), E_\beta^\dagger]).\end{aligned}$$

Maintenant le produit triple de Jordan dans $\mathfrak{p}^+$ est le transporté par ψ^{-1} de celui dans $\mathfrak{q}_c$. On a donc

$$\begin{aligned}[\widetilde{E_\alpha^\dagger}, \psi^{-1}(\mathrm{Sh}\,2H), E_\beta^\dagger] &= [-\psi^{-1}(\overline{U_\alpha}), \psi^{-1}(\mathrm{Sh}\,2H), \psi^{-1}(U_\beta)]\\ &= -\psi^{-1}([\overline{U_\alpha}, \mathrm{Sh}\,2H, U_\beta]),\end{aligned}$$

où on a tenu compte de la Proposition 2a. Ceci achève la preuve. ∎

Soit A un isomorphisme arbitraire de $\mathfrak{q}_c$ sur $\mathfrak{p}^+$. Comme à la Section 6, on peut définir de manière canonique les "crochets de Lie" $[A\bar{\partial}, \overline{A\bar{\partial}}]$ et $[\psi(A\bar{\partial}), \psi((A\bar{\partial})^{\sim})]$ ainsi que le "produit de Jordan" $(A\bar{\partial})\cdot(A\bar{\partial})^{\sim}$. On a pour ces objets des formules analogues à celles de la Section 6.

PROPOSITION 14. *Les conditions suivantes sont équivalentes*:

(i) $\mathscr{J}\tilde{f}(g)=0 \qquad (g\in K\overline{A^+})$,

(ii) $[\partial, \mathrm{Sh}\, 2H, \bar{\partial}]\, f(k\cdot\exp -H)=0 \qquad (k\in K,\ H\in\omega)$,

(iii) $\big((\mathrm{Ad}\, q_H(\psi^{-1}(\bar{\partial})))\cdot(\mathrm{Ad}\, q_H(\psi^{-1}(\bar{\partial})))^{\sim}\big) f(k\cdot\exp -H)=0$
$(k\in K,\ H\in\omega^0)$.

Preuve. Le groupe de Weyl W de la paire symétrique $(\mathfrak{k}, \mathfrak{l})$ opère sur $\mathfrak{h}$ par les permutations de $\{1, 2,..., l\}$. Ceci implique $\omega^0/W=\omega^1$, où ω^1 est le cône de $\mathfrak{h}$ défini par

$$\omega^1=\left\{\sum_{k=1}^{l} \lambda_k H_{\gamma_k}, 0<\lambda_l\leqslant \cdots \leqslant\lambda_2\leqslant\lambda_1\right\}.$$

On en déduit que $\omega=\mathrm{Ad}\, L\cdot\omega^0=\mathrm{Ad}\, L\cdot\omega^1$. On introduit la condition

(iv) $[\partial, \mathrm{Sh}\, 2H, \bar{\partial}]\, f(k\cdot\exp -H)=0 \qquad (k\in K,\ H\in\omega^1)$.

Il est clair que A^+ est exactement l'image de l'intérieur de ω^1 par l'application $H\to a_H$. En vertu de la Proposition 13 et par continuité, on a alors (i)$\Leftrightarrow$(iv).

Prouvons (ii)$\Leftrightarrow$(iv). Soient $H\in\omega$ et $H_1=\mathrm{Ad}\, l^{-1}\cdot H\in\omega^1$. On a $kl\cdot\exp -H_1=k\cdot\exp -H\cdot l$ et par un calcul élémentaire

$$\partial f(kl\cdot\exp -H_1)=\mathrm{Ad}\, l^{-1}(\partial f(k\cdot\exp -H)).$$

On en déduit

$$[\partial, \mathrm{Sh}\, 2H_1, \bar{\partial}] f(kl\cdot\exp -H_1)=\mathrm{Ad}\, l^{-1}([\partial, \mathrm{Sh}\, 2H, \bar{\partial}] f(k\cdot\exp -H)),$$

après avoir utilisé que $\mathrm{Sh}\, 2H_1=\mathrm{Ad}\, l^{-1}(\mathrm{Sh}\, 2H)$, et le fait que $\mathrm{Ad}\, L$ est le groupe des automorphismes algébriques de $\mathfrak{q}_c$. D'où (ii)$\Leftrightarrow$(iv).

Finalement la condition (iii) s'écrit, compte-tenu de la Proposition 2a,

$$\sum_{j,k} U_j^+ U_k^- f(k\cdot\exp -H)[\mathrm{Ad}\, q_H(\psi^{-1}(U_k)), [\overline{E_0}, \mathrm{Ad}\, q_H(\psi^{-1}(\overline{U_j}))]]=0.$$

Soit encore puisque $\mathrm{Ad}\, q_H\cdot E_0=\psi^{-1}(\mathrm{Sh}\, 2H)$,

$$\mathrm{Ad}\, q_H\big(\psi^{-1}([\partial, \mathrm{Sh}\, 2H, \bar{\partial}]\, f(k\cdot\exp -H))\big)=0.$$

D'où (iii)$\Rightarrow$(iv) et (ii)$\Rightarrow$(iii). ∎

Les deux propositions suivantes s'établiraient de manière exactement analogue aux Propositions 13, 14. On les laisse au lecteur.

PROPOSITION 15. *Les conditions suivantes sont équivalentes*:

$$\mathscr{H}\tilde{f}(g)=0 \qquad (g\in K\overline{A^+}),$$

$$[\operatorname{Ad} q_H(\psi^{-1}(\partial)), \overline{\operatorname{Ad} q_H(\psi^{-1}(\bar{\partial}))}]\,f(k\cdot\exp - H)=0 \qquad (k\in K,\ H\in\omega^0).$$

PROPOSITION 16. *Les conditions suivantes sont équivalentes*:

$$\mathscr{H}_1\tilde{f}(g)=0 \qquad (g\in K\overline{A^+}),$$

$$[\psi(\operatorname{Ad} q_H(\psi^{-1}(\bar{\partial}))), \psi((\operatorname{Ad} q_H(\psi^{-1}(\partial)))^{\sim})]\,f(k\cdot\exp - H)=0 \qquad (k\in K,\ H\in\omega^0).$$

Nous sommes maintenant en mesure de démontrer le résultat suivant.

THÉORÈME 4. *Soit f une fonction C^∞* bornée *sur X. La fonction f est la transformée de Poisson d'une fonction sur le bord de Shilov S si et seulement si sa restriction à l'ouvert dense $\tilde{X}$ (encore notée f) satisfait pour tous $k\in K$ et $H\in\omega$,*

$$[\partial, \operatorname{Sh} 2H, \bar{\partial}]\,f(k\cdot\exp - H)=0.$$

On observera que ces équations sont explicitement K-invariantes.

8.5. *Démonstration du Théorème* 4

La condition est clairement nécessaire puisque la condition $\mathscr{J}\tilde{f}=0$ l'est déjà. La démonstration que la condition est suffisante est strictement parallèle à celle du Théorème 2, donnée à la Section 7. Aussi nous en indiquons seulement les grandes lignes et laissons les détails au lecteur.

Soit $x=k\cdot\exp - H\cdot cx_0\in\tilde{X}$ avec $k\in K$ et $H\in\omega^0$. On maintient la notation précédente pour $q_H\in K^*$. On introduit les opérateurs

$$D_0=[\operatorname{Ad} q_H(\psi^{-1}(\partial)), \overline{\operatorname{Ad} q_H(\psi^{-1}(\bar{\partial}))}],$$
$$D_1=(\operatorname{Ad} q_H(\psi^{-1}(\bar{\partial})))\cdot(\operatorname{Ad} q_H(\psi^{-1}(\partial)))^{\sim},$$
$$D_2=[\psi(\operatorname{Ad} q_H(\psi^{-1}(\bar{\partial}))), \psi((\operatorname{Ad} q_H(\psi^{-1}(\partial)))^{\sim})].$$

En vertu des Propositions 14, 15, 16 ceux-ci correspondent respectivement aux opérateurs $\mathscr{H}$, $\mathscr{J}$, et $\mathscr{H}_1$. Par la Proposition 3 on a

$$D_0=\tfrac{1}{2}D_2+\psi(D_1).$$

Soit f une fonction C^∞ bornée sur $\tilde{X}$ satisfaisant $D_1 f = 0$. En vertu de la Remarque 2, f est solution du laplacien de X. Étant bornée elle s'écrit comme intégrale de Poisson d'une fonction bornée u sur K/M [2]. En décomposant u en la série de ses K-types, on peut toujours supposer u C^∞.

Soient donc u une fonction C^∞ bornée sur K/M et f son intégrale de Poisson telle que $D_1 f = 0$. On pose pour tous $k \in K$ et $H \in \omega^0$,

$$u(k, H) = \lim_{t \to 0_+} f(k \cdot \exp - tH \cdot cx_0)$$

$$D_i^{\#} u(k, H) = \lim_{t \to 0_+} D_i f(k \cdot \exp - tH \cdot cx_0) \qquad (i = 0, 1, 2).$$

La fonction u est définie sur K/L si et seulement si la fonction $u(k, H)$ est *indépendante de* H.

Johnson et Korányi [8] ont montré qu'il en est ainsi si f satisfait les équations $\mathscr{H}\bar{f} = 0$, c'est-à-dire $D_0 f = 0$. On en déduit que toute fonction C^∞ bornée solution de $D_0^{\#} u(k, H) = 0$ est indépendante de H.

Le Théorème 4 sera donc établi si nous démontrons la

PROPOSITION 17. *On a* $D_0^{\#} = \psi(D_1^{\#})$, *c'est-à-dire* $D_2^{\#} = 0$.

Preuve. Les opérateurs D_0 et D_1 étant *indépendants* de la base de $\mathfrak{q}_c$ choisie, nous supposons désormais que $\{U_i\}$ est une base sur $\mathbb{R}$ de $i\mathfrak{q}$, c'est-à-dire que $\{E_i = \psi^{-1}(U_i)\}$ est une base sur $\mathbb{R}$ de $\mathfrak{r}^+$. On a alors $E_i = \widetilde{E_i}$ et

$$(\operatorname{Ad} q_H(\psi^{-1}(U_i)))^{\sim} = (\operatorname{Ad} q_H \cdot E_i)^{\sim} = \operatorname{Ad} q_H \cdot E_i.$$

On a par définition

$$D_2 = \sum_{j,k} U_j^+ U_k^- \otimes [\psi(\operatorname{Ad} q_H(\psi^{-1}(U_k))), \psi((\operatorname{Ad} q_H(\psi^{-1}(U_j)))^{\sim})]$$

$$= \sum_{j,k} U_j^+ U_k^- \otimes [\psi(\operatorname{Ad} q_H \cdot E_k), \psi(\operatorname{Ad} q_H \cdot E_j)].$$

Par un calcul élémentaire on en déduit

$$D_2^{\#} = \sum_{j,k} U_j U_k \otimes [\psi(\operatorname{Ad} h \cdot E_k), \psi(\operatorname{Ad} h \cdot E_j)],$$

où $h \in \exp i\mathfrak{h}$ défini par

$$h = \exp\left(\tfrac{1}{2} \sum_{k=1}^{l} (\operatorname{Log} 2\lambda_k) H_{\gamma_k}\right)$$

est l'unique élément de $\exp i\mathfrak{h}$ tel que $\psi(\operatorname{Ad} h \cdot E_0) = 2H$. On voit que les termes du membre de droite s'éliminent deux à deux. D'où le résultat. ∎

Ceci achève la preuve du Théorème 4.

9. Algèbres de Jordan

Comme on l'a indiqué auparavant, les Théorèmes 2, 3, 4 s'expriment *purement* en termes d'algèbres de Jordan. Nous explicitons ici brièvement ces formulations. *Les notations sont désormais indépendantes des précédentes.* Nous renvoyons à [9, 10] pour la terminologie, des démonstrations et des références.

Soient $\mathscr{A}$ une algèbre de Jordan réelle compacte (i.e., formellement réelle) avec élément unité e et $\mathscr{A}_c$ sa complexifiée. On note $z \to \bar{z}$ la conjugaison dans $\mathscr{A}_c$ par rapport à $\mathscr{A}$ et $(z, w) \to zw$ le produit de Jordan dans $\mathscr{A}_c$. Pour tout $z \in \mathscr{A}_c$ on définit les endomorphismes $L(z)$ (translation à gauche) et $P(z)$ (représentation quadratique) en posant $L(z)\,w = zw$ et

$$P(z) = 2L^2(z) - L(z^2).$$

On note $\operatorname{Exp} z$, $\operatorname{Sh} z$ et z^{-1} l'exponentielle, le sinus hyperbolique et (s'il existe) l'inverse de Jordan de $z \in \mathscr{A}_c$. Le produit triple de Jordan dans $\mathscr{A}_c$ est défini par

$$\{x, y, z\} = x(yz) + z(yx) - y(xz).$$

La forme $\sigma(z, w) = \operatorname{trace} L(z\bar{w})$ est une forme hermitienne définie positive sur $\mathscr{A}_c$. On choisit une base $\{e_i\}$ de $\mathscr{A}_c$ *orthonormée* par rapport à cette forme. On note $\{z_i\}$ les coordonnées de z correspondantes.

Soit Ω la composante connexe de e dans l'ensemble des éléments Jordan-inversibles de $\mathscr{A}$ (domaine de positivité). Dans $\mathscr{A}_c$ on considère le tube $\mathscr{T} = \mathscr{A} + i\Omega$. Le noyau de Szegö de $\mathscr{T}$ est donné par

$$S(z, w) = \alpha[\det P(-i(z - \bar{w}))]^{-1/2},$$

pour une constante positive α. Le noyau de Poisson de $\mathscr{T}$ est alors défini par la formule habituelle

$$P(z, u) = \frac{|S(z, u)|^2}{S(z, z)} \qquad (z \in \mathscr{T}, u \in \mathscr{A}).$$

Théorème 2 bis. *Une fonction C^∞ bornée f sur le tube $\mathscr{T}$ est l'intégrale de Poisson d'une fonction sur le bord de Shilov si et seulement si pour tout $z = x + iy \in \mathscr{T}$, on a*

$$\sum_{j,k} \frac{\partial^2 f}{\partial z_j\, \partial \bar{z}_k}(z)\,\{\overline{e_j}, y, e_k\} = 0.$$

On considère maintenant le domaine borné symétrique

$$D = \{(z - ie)(z + ie)^{-1}, z \in \mathscr{T}\}$$

obtenu à partir du tube $\mathscr{T}$ par transformation de Cayley. Soient $\mathfrak{K}$ le groupe des automorphismes holomorphes de D fixant 0, et $\mathfrak{L} = \mathrm{Aut}\,\mathscr{A}$ le groupe des automorphismes algébriques de $\mathscr{A}$. On a $\mathfrak{L} \subset \mathfrak{K}$ et $S = \mathfrak{K} \cdot e = \mathfrak{K}/\mathfrak{L}$ est le bord de Shilov de D. On pose

$$B(z, w) = \mathrm{Id} - 2L(z)\, L(\bar{w}) + 2L(\bar{w})\, L(z) - 2L(z\bar{w}) + P(z)\, P(\bar{w}).$$

Alors le noyau de Szegö de D est donné par

$$S(z, w) = \beta[\det B(z, w)]^{-1/2},$$

pour une constante positive β. Le noyau de Poisson de D est ensuite défini par la formule habituelle.

THÉORÈME 3 BIS. *Une fonction C^∞ bornée f sur D est l'intégrale de Poisson d'une fonction sur S si et seulement si pour tout $z \in D$ on a*

$$\sum_{j,k} \frac{\partial^2 f}{\partial z_j\, \partial \bar{z}_k}(z)((B(z, z))^{1/2} e_k) \cdot \overline{((B(z, z))^{1/2} e_j)} = 0.$$

Soit $\tilde{D}$ l'ensemble des éléments Jordan-inversibles de D: c'est un ouvert dense de D et un espace fibré sur S de fibre type Ω. En effet on a le théorème suivant de décomposition "en coordonnées polaires" de $\tilde{D}$, établi dans [15, Théorème 3, p. 191]: l'application de $\mathfrak{K} \times \Omega$ dans $\mathscr{A}_c$ définie par $(k, x) \to k \cdot \mathrm{Exp}(-x)$ identifie $\tilde{D}$ à l'espace fibré $\mathfrak{K} \times_{\mathfrak{L}} \Omega$. Il revient au même de dire que tout élément de $\tilde{D}$ peut s'écrire $k \cdot \mathrm{Exp}(-x)$, et qu'on a $k \cdot \mathrm{Exp}(-x) = k' \cdot \mathrm{Exp}(-x')$ si et seulement si il existe $l \in \mathfrak{L}$ tel que $k = k'l^{-1}$ et $x = l \cdot x'$.

Si f est une fonction sur D on note encore f sa restriction à $\tilde{D}$. Soit J la structure complexe naturelle de $\mathscr{A}_c$, qu'on considère désormais comme un espace vectoriel réel. Soit u un élément arbitraire de $\mathscr{A}_c$. Pour tout $z = k \cdot \mathrm{Exp}(-x) \in \tilde{D}$ on note

$$uf(k \cdot \mathrm{Exp}(-x)) = \frac{d}{dt} f\left(k \cdot \left(P\left(\mathrm{Exp}\left(-\frac{x}{2}\right)\right) \mathrm{Exp}\, tu\right)\right)\Bigg|_{t=0},$$

$$u^{\pm} f(k \cdot \mathrm{Exp}(-x)) = (u \mp iJu) f(k \cdot \mathrm{Exp}(-x)).$$

La restriction à $\tilde{D}$ du noyau de Szegö de D peut s'écrire

$$S(z, w) = \beta[\det P(z)\, P(z^{-1} - \bar{w})]^{-1/2} = \beta[\det P(\bar{w}^{-1} - z)\, P(\bar{w})]^{-1/2}.$$

THÉORÈME 4 BIS. *Une fonction C^∞ bornée f sur D est l'intégrale de Pois-*

son d'une fonction sur S si et seulement si sa restriction à l'ouvert dense $\tilde{D}$ (encore notée f) satisfait pour tous $k \in \mathfrak{K}$ et $x \in \Omega$,

$$\sum_{i,j} e_i^+ e_j^- f(k \cdot \mathrm{Exp}(-x))\{\overline{e_i}, \mathrm{Sh}\, x, e_j\} = 0.$$

On observera l'analogie remarquable entre les Théorèmes 2 bis et 4 bis. Il serait intéressant de disposer de preuves directes, strictement internes au formalisme des algèbres de Jordan.

BIBLIOGRAPHIE

1. N. BERLINE ET M. VERGNE, Équations de Hua et noyau de Poisson, *in* "Lecture Notes in Mathematics," Vol. 880 pp. 1–51, Springer, Berlin, 1981.
2. H. FURSTENBERG, A Poisson formula for semi-simple Lie groups, *Ann. of Math.* **77** (1963), 335–386.
3. HARISH-CHANDRA, Representations of semi-simple Lie groups VI, Integrable and square-integrable representations, *Amer. J. Math.* **78** (1956), 564–628.
4. S. HELGASON, "Differential Geometry, Lie Groups and Symmetric Spaces," Academic Press, New York, 1978.
5. L. K. HUA, "Harmonic Analysis of Functions of Several Complex Variables in the Classical Domains," Amer. Math. Soc., Providence, R.I., 1963.
6. K. JOHNSON, Remarks on a theorem of Korányi and Malliavin on the Siegel upper half-plane of rank two, *Proc. Amer. Math. Soc.* **67** (1977), 351–356.
7. K. JOHNSON, Differential equations and the Bergman-Shilov boundary on the Siegel upper half-plane, *Ark. Mat.* **16** (1978), 95–108.
8. K. JOHNSON ET A. KORĂNYI, The Hua operators on bounded symmetric domains of tube type, *Ann. of Math.* **111** (1980), 589–608.
9. M. KOECHER, "Jordan Algebras and Their Applications," Lecture notes, Univ. of Minnesota, Minneapolis, 1962.
10. M. KOECHER, "An Elementary Approach to Bounded Symmetric Domains," Lecture notes, Rice University, Houston, 1971.
11. A. KORÁNYI ET J. WOLF, Realization of Hermitian symmetric spaces as generalized half-planes, *Ann. of Math.* **81** (1965), 265–288.
12. A. KORÁNYI ET P. MALLIAVIN, Poisson formula and compound diffusion associated to an overdetermined elliptic system on the Siegel half-plane of rank two, *Acta Math.* **134** (1975), 185–209.
13. A. KORÁNYI ET S. VÁGI, Rational inner functions on bounded symmetric domains, *Trans. Amer. Math. Soc.* **254** (1979), 179–193.
14. M. LASSALLE, Les orbites d'un espace hermitien symétrique compact, *Invent. Math.* **52** (1979), 199–239.
15. M. LASSALLE, Une nouvelle réalisation des espaces hermitiens symétriques, *Bull. Soc. Math. France* **111** (1983), 181–192.
16. M. LASSALLE, Les équations de Hua d'un domaine borné symétrique du type tube, *Invent. Math.* **77** (1984), 129–161.
17. M. LASSALLE, Transformées de Poisson, algèbres de Jordan et équations de Hua, *C. R. Acad. Sci. Paris, Sér. I* **294** (1982), 325–327.
18. M. LASSALLE, Algèbres de Jordan, coordonnées polaires et équations de Hua, *C. R. Acad. Sci. Paris, Sér. I* **294** (1982), 613–615.